УДК 517.956

**ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯМИ ЗАДАЧИ  
ШОУОЛТЕРА – СИДОРОВА ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНОЙ МОДЕЛИ  
СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ФИЛЬТРУЮЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ**

***Бадоян А.Д.***

Работа посвящена исследованию задачи оптимального управления состояниями системы, описываемой с помощью уравнения Дзекцера. Это уравнение относится к обширному классу неклассических уравнений в частных производных – уравнений соболевского типа. Причем оно рассмотрено в предположении, что коэффициенты уравнения зависят от времени, что, например, описывает размытие почвы при фильтрации. В работе сформулирован результат о существовании и единственности решения задачи оптимального управления решениями рассматриваемой модели.

*Ключевые слова*: модель Дзекцера, уравнения соболевского типа, задача оптимального управления, относительно секториальный оператор.

**1. Постановка задачи**

Пусть – ограниченная область с границей из класса .

В цилиндре рассмотрим задачу Дирихле

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (1) |

с условием Шоуолтера – Сидорова [1]

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2) |

для уравнения в частных производных вида

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | , | (3) |

где коэффициенты , , и скалярная функция будут описаны ниже, а вектор-функция управления отвечает внешнему воздействию на систему. Уравнение (3) относится к неклассическим уравнениям математической физики [2], моделирует эволюцию свободной поверхности фильтрующейся жидкости [3] и в литературе его называют уравнением Дзекцера. Отметим, что условие Шоуолтера – Сидорова (2) для уравнений соболевского типа является более применимым, чем классическая задача Коши (более подробно см. в [1]).

Введем в рассмотрение функционал качества

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (4) |

где и – гильбертовы пространства, , , – плановое состояние системы. Нашей задачей является нахождение на некотором выпуклом замкнутом подмножестве оптимального управления , минимизирующего заданный функционал для задачи (1), (3) с начальным условием Шоуолтера – Сидорова (2). Оптимальное управление для стационарных уравнений соболевского типа рассматривалось в различных аспектах (см. по этому поводу, например, [4]).

**2. Описание модели Дзекцера**

Под грунтовыми водами понимают свободные (гравитационные) воды первого от поверхности Земли стабильного водоносного горизонта, заключенного в рыхлых отложениях или верхней трещиноватой части коренных пород, залегающего на первом от поверхности, выдержанном по площади водоупорном слое. Область их питания совпадает с областью распространения водопроницаемых пород. Верхняя граница зоны насыщения называется уровнем или зеркалом грунтовых вод. Порода, насыщенная водой, называется водоносным горизонтом, мощность которого определяется расстоянием по вертикали от зеркала грунтовых вод до водоупора. Она изменяется в пространстве и во времени. Питание грунтовых вод происходит за счет инфильтрации атмосферных осадков, местами за счет инфильтрации вод рек и других поверхностных водоемов, а также подпитывания из более глубоких водоносных горизонтов [5].

Движение грунтовых вод подчиняется силе тяжести и осуществляется в виде потоков по сообщающимся порам или трещинам. Зеркало грунтовых вод до известной степени повторяет рельеф поверхности, и грунтовые потоки движутся от повышенных участков (начиная от водораздела грунтовых вод) к пониженным участкам (оврагам, рекам, озерам, морям), где происходит их разгрузка в виде нисходящих источников (родников) или скрытым субаквальным рассредоточенным способом (например, под водами русел рек, дном озер и морей). Такие области называются областями разгрузки или дренирования. Грунтовый поток, направленный к местам разгрузки, образует криволинейную поверхность, называемую депрессионной. Течение грунтовой воды называется фильтрацией. Она зависит от наклона зеркала грунтовых вод или от гидравлического (напорного) градиента, а также от водопроницаемости горных пород. В большинстве своем грунтовые воды имеют свободную поверхность и непосредственную связь с атмосферой [5].

Большой практический интерес в теории движения грунтовых вод представляет уравнение

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | , | (5) |

которое является обобщением уравнения движения грунтовых вод со свободной поверхностью и моделирует эволюцию свободной поверхности фильтрующейся жидкости [3]. В силу того, что выражение слева в уравнении (5) может быть нулевым при некоторых значениях параметра , данное уравнение относится к обширному классу неклассических уравнений математической физики [2]. Данное исследование проведено в рамках теории уравнений соболевского типа [6].

Прежде чем переходить к рассмотрению вопросов оптимального управления, опишем более подробно уравнение Дзекцера (5). В этом уравнении параметр определяется следующей формулой

,

в которой – коэффициент свободной пористости, – модуль питания потока через свободную поверхность, – коэффициент фильтрации, – напор на свободной поверхности. Параметры и характеризуются формулами [3]

, .

Перепишем уравнение (1) в следующем виде

.

Коэффициент пористости характеризует отношение объема пор грунта к объему его минеральной части. Учитывая, что во многих случаях это отношение терпит изменение с течением времени, то далее мы будем его рассматривать как скалярную функцию, зависящую от времени. Переобозначим коэффициенты уравнения (5) следующим образом ,

, , тогда оно примет вид

,

учитывая формулы, задающие эти параметры, получаем , , .

**3. Оптимальное управление**

Перейдем к рассмотрению задачи оптимального управления решениями задачи Шоуолтера – Сидорова для уравнения Дзекцера (3).

Введем в рассмотрение пространство функций

.

Выделим в этом пространстве замкнутое и выпуклое подмножество – множество допустимых управлений.

**Определение.** Вектор-функцию назовем *оптимальным управлением* решениями задачи (1) – (3) с функционалом (4), если

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | , | (6) |

где , построенное по , является решением (1) – (3).

Для того, чтобы воспользоваться классическими результатами, полученными в работе [6] необходимо редуцировать уравнение (3) с граничным условием (1) к нестационарному уравнению соболевского типа [7, 8] вида

в банаховых пространствах , с операторами и . Для этого возьмем функциональные пространства

, ,

где , а – пространства Соболева.

Вектор-функция управления . Операторы , определим формулами

, ,

а область определения оператора :

.

**Лемма 1.** *Для любых , , оператор , а оператор .*

Обозначим через спектр однородной задачи Дирихле в области для оператора Лапласа . Спектр отрицателен, дискретен, конечнократен и сгущается только к , т.е. ограничен справа. Через обозначим множество собственных значений однородной задачи Дирихле в области для оператора Лапласа , занумерованное по невозрастанию с учетом кратности, а через – семейство соответствующих собственных функций, ортонормированных относительно скалярного произведения в , , .

**Лемма 2.** *Для любых , , оператор сильно -секториален.*

В условиях леммы 2 построим *L*-резольвенту и правую -резольвенту оператора [6]:

Откуда ясно, что относительный *L* -спектр оператора имеет вид

В силу того, что точки спектра оператора Лапласа вещественны, дискретны, конечнократны и сгущаются только к , то обладает теми же свойствами.

Проектор определен следующим образом а следовательно условие Шоуолтера – Сидорова (4) примет вид

В силу результатов [7] справедливы следующие две теоремы.

**Теорема 1.** *Пусть , , , отделена от нуля, тогда при любых , существует единственное сильное решение задачи* (1) – (3) *вида*

**Теорема 2.** *Пусть , , , отделена от нуля, тогда при любых , существует единственное оптимальное управление* *задачи* (1) – (3), (6) *с функционалом* (4).

В дальнейшем предполагается по аналогии с работой [9] провести вычислительный эксперимент для задачи оптимального управления решениями модели Дзекцера.

*В заключении автор считает своим приятным долгом поблагодарить своего научного руководителя Сагадееву Минзилю Алмасовну за ценные комментарии и плодотворные дискуссии, которые способствовали улучшению данной работы.*

Библиографический список

1. Свиридюк, Г.А. Задача Шоуолтера – Сидорова как феномен уравнений соболевского типа / Г.А. Свиридюк, С.А. Загребина // Известия Иркутстк. гос. ун-та. Серия: Математика. – 2010. – Т. 3, № 1. – С. 104–125.

2. Свиридюк, Г.А. Неклассические модели математической физики / Г.А. Свиридюк, С.А. Загребина // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2012. – № 40 (229). – С. 7–18.

3. Дзекцер, Е.С. Обобщенные уравнения движения грунтовых вод со свободной поверхностью / Е.С. Дзекцер // ДАН СССР. – 1972. – Т. 202, № 5. – C.1031 – 1033.

4. Манакова, Н.А. Задачи оптимального управления для полулинейных уравнений соболевского типа / Н.А. Манакова. – Челябинск: Изд.центр ЮУрГУ, 2012. – 88 с.

5. Полубаринова-Кочина, П.Я. Теория движения грунтовых вод / П.Я. Полубаринова-Кочина. – М.: Наука, 1977. – 664 с.

6. Sviridyuk, G.A. Linear Sobolev type equations and degenerate semigroups of operator / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov. – Utrecht, Boston: VSP, 2003. – 216 p.

7. Сагадеева, М.А. Оптимальное управление решениями нестационарных уравнений соболевского типа специального вида в относительно секториальном случае / М.А. Сагадеева, А.Д. Бадоян // Вестник МаГУ. Математика. – 2013. – Вып.15. – С.68–80.

8. Сагадеева, М.А. Задачи оптимального и жесткого управления решениями одного класса нестационарных уравнений соболевского типа / М.А. Сагадеева // Математические заметки ЯГУ. – 2013. – Т. 20, № 2 – С.170–179.

9. Сагадеева, М.А. Задача оптимального управления решениями нестационарной модели Баренблатта – Желтова – Кочиной / М.А. Сагадеева, А.Д. Бадоян // Вестник ЮУрГУ. Серия: Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника. – 2014. – Т. 14, № 2. – С. 5–11.

*Информация об авторах*

*ФИО автора, группа, факультет, университет, город, телефон, электронная почта.*

*ФИО науч. руководителя, кафедра, факультет, университет, город, телефон, электронная почта.*